

PAUTA EVALUACION 2  
ALGEBRA LINEAL (520131)

**Problema 1.**

- a) Sean  $P = (-3, 1, 7)$  y  $Q = (8, 1, 7)$  puntos de  $\mathbb{R}^3$ . Encuentre todos los puntos  $R$  de  $\mathbb{R}^3$  tal que  $\vec{PQ}$  sea perpendicular a  $\vec{PR}$ .
- b) Sean  $u = i - 2j + 3k$ ,  $v = -3i + 2j + 5k$  y  $w = 2i - 4j + k$  vectores en  $\mathbb{R}^3$
- Obtenga  $\text{proy}_w u$ .
  - Respecto de i); ¿qué vector es paralelo a  $w$ ?, ¿qué vector es perpendicular a  $w$ ?. Verifique con el producto vectorial para el primer caso y con el producto escalar para el segundo.
  - Obtenga el volumen del paralelepípedo generado por los vectores  $u, v$  y  $w$

**(2.0 puntos)**

SOLUCION

- a)  $P = (-3, 1, 7)$ ,  $Q = (8, 1, 7)$ , los puntos  $R$  tales que  $\vec{PQ} \perp \vec{PR}$   
 $\vec{PQ} = 11i$   
Si  $R = (x, y, z)$  es un punto de  $\mathbb{R}^3$ , entonces  $\vec{PR} = (x + 3, y - 1, z - 7)$   
Ahora,  $\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 11(x + 3) + 0 + 0 = 11(x + 3)$   
y para que  $\vec{PQ}$  y  $\vec{PR}$  sean perpendiculares, debe tenerse que:  
 $\vec{PQ} \cdot \vec{PR} = 0 \Rightarrow x = -3$   
Luego los puntos  $R$  deben ser de la forma:

$$R = (-3, y, z)$$

- b)  $u = i - 2j + 3k$ ,  $v = -3i + 2j + 5k$ ,  $w = 2i - 4j + k$ , vectores de  $\mathbb{R}^3$

i)

$$\text{proy}_w u = \frac{u \cdot w}{\|w\|^2} w$$

$$u \cdot w = (i - 2j + 3k) \cdot (2i - 4j + k)$$

$$= 2 + 8 + 3 = 13$$

$$\|w\|^2 = 4 + 16 + 1 = 21$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{10}{21} - \frac{40}{21} + \frac{50}{21} \\
&= 0
\end{aligned}$$

iii) Area  $A$  del paralelepípedo generado por  $u, v$  y  $w$ :

$$A = |u \cdot (v \times w)|$$

$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 5 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 22i + 13j + 8k.$$

$$u \cdot (v \times w) = 1(22) - 2(13) + 3(8) = 20$$

De donde:

$$A = |u \cdot v \times w| = 20$$

## Problema 2.

Considere las siguientes ecuaciones de las rectas  $L_1$  y  $L_2$  en el espacio

$$\begin{array}{l}
x = 3 + 2s \\
L_1: y = -2 + 3s, \\
z = 4 - 3s
\end{array}
, \quad
\begin{array}{l}
x = 4 - 2t \\
L_2: y = -3 + 2t \\
z = 4 - 5t
\end{array}$$

a) ¿Cuáles de los puntos:  $(1, 1, 1), (1, -1, 0)$  y  $(4, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$  es punto de  $L_1$ ? ¿Cuáles de los puntos:  $(0, 1, -6), (1, 2, 3), (0, 1, -1)$  es punto de  $L_2$ ?

b) Encuentre la ecuación de la recta que pase por el punto  $(2, -1, 3)$  y sea perpendicular a  $L_1$  y  $L_2$ .

(2.0 puntos)

## SOLUCION

$$\begin{array}{l}
x = 3 + 2s \\
L_1: y = -2 + 3s \\
z = 4 - 3s
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
x = 4 - 2t \\
L_2: y = -3 + 2t \\
z = 4 - 5t
\end{array}$$

a) -  $(1, 1, 1) \notin L_1$ , ya que:

$$\begin{aligned}
1 &= 3 + 2s \Rightarrow s = -1 \\
1 &= -2 + 3s \Rightarrow s = 1 \\
1 &= 4 - 3s \Rightarrow s = 1
\end{aligned}$$

-  $(1, -1, 0) \notin L_1$ ; va que:

–  $(0, 1, -1) \notin L_2$ ; ya que

$$\begin{aligned} 0 &= 4 - 2t \Rightarrow t = 2 \\ 1 &= -3 + 2t \Rightarrow t = 2 \\ -1 &= 4 - 5t \Rightarrow t = 1 \end{aligned}$$

b)

$$v_1 = 2i + 3j - 3k \parallel a L_1$$

$$v_2 = -2i + 2j - 5k \parallel a L_2$$

$$v = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -9i + 16j + 10k$$

Entonces,  $v = -9i + 16j + 10k$  es perpendicular a  $v_1$  y  $v_2$ , y por lo tanto perpendicular a  $L_1$  y  $L_2$ ; con lo cual  $v$  constituye un vector paralelo a la recta buscada.

Así la ecuación de la recta perpendicular a  $L_1$  y  $L_2$  y que pasa por el punto  $(2, -1, 3)$  es:

$$xi + yj + zk = 2i - j + 3k + t(9i + 16j + 10k) \text{ (ecuación vectorial)}$$

o bien:

$$xi + yj + zk = (2 + 9t)i + (-1 + 16t)j + (3 + 10t)k$$

### Problema 3.

- a) Verifique que los vectores  $u = 2i - j - k$ ,  $v = 4i + 3j + 2k$  y  $w = 6i + 7j + 5k$  de  $\mathbb{R}^3$  son coplanares y encuentre la ecuación del plano que los contiene.
- b) Obtenga la distancia del punto  $(1, 2, 1)$  a la recta de intersección del plano en a) con el plano de ecuación  $x - y + z = \frac{1}{4}$

(2.0 puntos)

### SOLUCION

a)  $u = 2i - j - k$ ,  $v = 4i + 3j + 2k$ ,  $w = 6i + 7j + 5k$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = i - 8j + 10k$$

$$\begin{aligned} w \cdot (u \times v) &= (6i + 7j + 5k) \cdot (i - 8j + 10k) \\ &= 6(1) - 7(8) + 10(50) = 0 \end{aligned}$$

b) Recta intersectada por los planos:

$$\pi_1 : x - 8y + 10z = 0, \quad \text{y} \quad \pi_2 : x - y + z = 1/4$$

$n_1 = i - 8j + 10k$  : vector normal a  $\pi_1$      $n_2 = i - j + k$  : vector normal a  $\pi_2$ .

Entonces, un vector paralelo a la recta de intersección es:

$$v = n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -8 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 9j + 7k$$

Un punto de la recta:

$$\begin{array}{l} x - 8y + 10z = 0 \\ x - y + z = 1/4 \end{array}$$

Considerando  $x = 0$ , se tiene que:

$$\begin{array}{l} -8y + 10z = 0 \\ -y + z = 1/4 \end{array}$$

De donde se obtiene que:  $z = -1$ ,  $y = -5/4$  y el punto  $(0, -5/4, -1)$  es un punto de la recta de intersección de los dos planos. De lo anterior la ecuación de dicha recta estaría dada por:

$$\frac{x}{2} = \frac{y + 5/4}{9} = \frac{z + 1}{7}$$

Así la distancia de  $(1, 2, 1)$  a la recta está dada por:

$$d = \frac{\|v \times P_0 \vec{P}_1\|}{\|v\|}$$

donde  $P_0 = (1, 2, 1)$  y  $P_1$  es algún punto de la recta. Tomando  $P_1 = (0, -5/4, -1)$  se tiene que:

$P_0 \vec{P}_1 = -i - \frac{13}{4} - 2k$ ,  $v = 2i + 7j + 9k$ ; entonces:

$$v \times P_0 \vec{P}_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 9 & 7 \\ -1 & -\frac{13}{4} & -2 \end{vmatrix} = \frac{19}{5}i - 3j + \frac{5}{2}k$$

$$\|v \times P_0 \vec{P}_1\| = \frac{11}{4}\sqrt{5}$$

$$\|v\| = \sqrt{134}$$

de donde: